Είδαμε: $\bar f : U \to \mathbb{R}^m$

$U \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό

διαφορίσιμη στο $\bar x \in U$

$\Rightarrow$ { συνεχής στο $\bar x$

$\not\Leftarrow$ { μερικώς διαφορίσιμη στο $\bar x$

και τότε $D\bar f(\bar x) = J_{\bar f}(\bar x) \in \mathbb{R}^{m\times n}$

η παράγωγος της $\bar f$ στο $\bar x$.

Πώς μπορούμε στην πράξη να δούμε αν συναρτήσεις είναι διαφορίσιμες;

Α' τρόπος: Υπολογίζω Ιακωβιανό

- τσεκάρω $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(\bar x + \bar h)}{\|\bar h\|} = \bar 0$

Β' τρόπος: (αρκετά συχνός): Θεώρημα 3.22. (ΒΑΣΙΚΟ)

$f : U \to \mathbb{R}$ μερικώς διαφορίσιμη στο $U \subset \mathbb{R}^n$, ανοιχτό

[Παρατήρηση: Αυτό μπορούμε να το κατάξουμε και για περιορισμούς της f γύρω από ένα σημείο που μας ενδιαφέρει ?]

και ότι όλες οι μερικές παράγωγοι $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} : U \to \mathbb{R}$, $i=1,\dots,n$ είναι συνεχείς στο $\bar x \in U$. [$(=)$ $\nabla f : U \to \mathbb{R}^n$ συνεχής στο $\bar x$]

Τότε η f είναι διαφορίσιμη στο $\bar x \in U$.

Πόρισμα: (3.22): Έστω $\bar f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} : U \to \mathbb{R}^m$ μερικώς διαφορίσιμη στο $U \subset \mathbb{R}^n$, ανοιχτό, και έστω ότι όλες οι μερ. παραγ. $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar x)$ $\forall j = 1 \dots m$ υπάρχουν και είναι συνεχείς στο $\bar x \in U$

[δηλ. $\exists\, J_{\bar f} : U \to \mathbb{R}^{m\times n}$ και είναι συνεχής στο $\bar x \in U$ (βλ. (*))]

Τότε η $\bar f$ διαφορίσιμη στο $\bar x \in U$ [δηλ. $D\bar f(\bar x) = J_{\bar f}(\bar x)$]

Πόρισμα 3.23: Έστω ότι η $\bar f : U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό, είναι μερικώς διαφορίσιμη [δηλ. $\exists\, J_{\bar f} : U \to \mathbb{R}^{m\times n}$] και οι μερικές της παράγωγοι είναι συνεχείς (στο U) [δηλ. βλ. (*), $J_{\bar f} : U \to \mathbb{R}^{m\times n}$ συνεχής (στο U)]

Τότε η $\bar f$ είναι διαφορίσιμη (στο U)

(*) Ορισμός / Παρατήρηση:

Μια συνάρτηση $A: U \to \mathbb{R}^{m\times n}$, $U \subset \mathbb{R}^n$, ανοικτό

$$A(\bar{x}) = \begin{pmatrix} a_{11}(\bar{x}) & \cdots & a_{1n}(\bar{x}) \\ \vdots & & \\ a_{m1}(\bar{x}) & & a_{mn}(\bar{x}) \end{pmatrix} \quad \forall \bar{x} \in U$$

λέγεται συνεχής στο $\bar{x} \in U$, αν $\forall \bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$: $\underbrace{A(\bar{x}_\nu) \xrightarrow[\nu\to\infty]{} A(\bar{x}_0)}$

$(\Leftrightarrow) \; \|A(\bar{x}_\nu) - A(\bar{x}_0)\| \to \infty$

όπου $\|\bar{A}(\bar{x})\| = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}(\bar{x})|^2$. Ισοδύναμα (στα διανυσματικά συναρτ.)

$\forall j = 1, \ldots m$, $\forall i = 1, \ldots n$: $a_{ij}: U \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς στο $\bar{x}_0 \in U$

Παρατήρηση: Σύμφωνα με αυτό τον ορισμό, και το Πόρισμα 3.2.3, αν $\exists J\bar{f}: U \to \mathbb{R}^{m\times n}$ και είναι συνεχής, τότε $D\bar{f} = J\bar{f}$, δηλ. η παράγωγος της $\bar{f}$ είναι συνεχής και τότε λέμε ότι η $\bar{f}$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη.

και το Πόρισμα 3.2.3 δεν λέει τίποτα άλλο από $\underbrace{\bar{f} \text{ συνεχώς διαφορίσιμη}}$

$\not\Leftarrow^{(1)}$ $\Rightarrow \bar{f}$ διαφορίσιμη

$\overset{\text{ορισμός}}{\Leftrightarrow} \exists D\bar{f}: U \to \mathbb{R}^{m\times n}$

$\overset{\text{πόρισμα}}{\Leftrightarrow} \exists J\bar{f}: U \to \mathbb{R}^{m\times n}$ και είναι συνεχής

$\overset{\text{ορισμός}}{\Leftrightarrow}$ $\bar{f}$ συνεχώς μερικώς διαφορίσιμη

Αποδείξεις: (1) Το πόρισμα 3.2.3 προκύπτει από την εφαρμογή του Πορ. 3.2.2 σε κάθε $\bar{x} \in U$

(2) Το Πορ. 3.2.2 προκύπτει από την εφαρμογή του θεωρήματος 3.2.2 σε κάθε συνιστώσα συνάρτηση f_j, $j = 1, \ldots m$

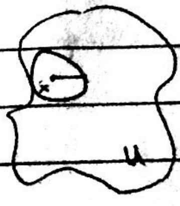
(3) Η απόδειξη του θεωρήμ. 3.2.2 ακολουθεί.

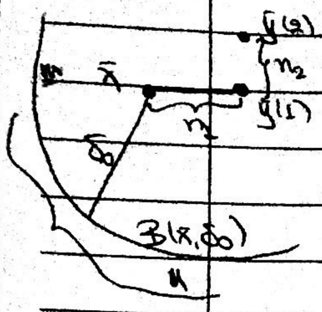
Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $\bar{x} \in U$: [$\Rightarrow \exists \delta_0 > 0$: $B(\bar{x}, \delta_0) \subset U$. Επίσης,

$\underbrace{\bar{h} = (h_1, \ldots h_n) \in B(\bar{0}, \delta_0) \setminus \{\bar{0}\}}$

$\Leftrightarrow 0 < \|\bar{h}\| < \delta_0$

$\Leftrightarrow \bar{x} + \bar{h} \in B(\bar{x}, \delta_0) \setminus \{\bar{x}\}$





$\Rightarrow$ Θέτουμε $\bar{y}^{(k)} = \bar{x} + \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \eta_i \bar{e}_i}_{=(\eta_1,\dots,\eta_k,0,\dots,0)} \in B(\bar{x},\delta_0) \subset U \quad \forall k=1,\dots,n$

$\bar{y}^{(0)} := \bar{x}$

Τότε: αφού $\bar{y}^{(k)} - \bar{y}^{(k-1)} = \eta_k \bar{e}_k$, $\forall k=1,\dots,n$ υπάρχουν σύμφωνα με το ΘΜΤ (για πραγμ. συναρτ. πραγμ. μεταβλητής) $\vartheta_k \in [0,1]$ έτσι ώστε:

$$\underbrace{f(\bar{y}^{(k)})}_{=g(1)} - \underbrace{f(\bar{y}^{(k-1)})}_{=g(0)} = \underbrace{f(\bar{y}^{(k-1)} + \eta_k \bar{e}_k)}_{=g(1)} - \underbrace{f(\bar{y}^{(k-1)})}_{=g(0)} =$$

$$= \underbrace{\eta_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{y}^{(k-1)} + \vartheta_k \eta_k \bar{e}_k)}_{=g'(\vartheta_k)}$$

Πράγματι, για $g(\vartheta) := f(\bar{y}^{(k-1)} + \vartheta \eta_k \bar{e}_k)$, $\vartheta \in [0,1]$, έχουμε $g(\vartheta) = H(\vartheta \eta_k)$ όπου για $\lambda \in [0,\eta_k]$: $H(\lambda) = f(\bar{y}^{(k-1)} + \lambda \bar{e}_k)$

με
$$H'(\lambda) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\bar{y}^{(k-1)} + \lambda \bar{e}_k + h\bar{e}_k) - f(\bar{y}^{(k-1)} + \lambda \bar{e}_k)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{y}^{(k-1)} + \lambda \bar{e}_k)$$

$$\Rightarrow g'(\vartheta) = \eta_k H'(\vartheta \eta_k) = \eta_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{y}^{(k-1)} + \vartheta \eta_k \bar{e}_k)$$

Συνεπώς
$$f(\bar{x}+\bar{\eta}) - f(\bar{x}) = \sum_{k=1}^{n} f(\bar{y}^{(k)}) - f(\bar{y}^{(k-1)}) = \sum_{k=1}^{m} \eta_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{y}^{(k-1)} + \vartheta_k \eta_k \bar{e}_k)$$

$$\underset{(**)}{\Rightarrow} |f(\bar{x}+\bar{\eta}) - f(\bar{x}) - \nabla f(\bar{x})\bar{\eta}| \leq \sum_{k=1}^{m} |\eta_k| \left| \frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{y}^{(k-1)} + \vartheta_k \eta_k \bar{e}_k) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{x}) \right|$$

Όμως $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ συνεχής στο $\bar{x}$, $\forall k=1,\dots,n \Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists \delta\in(0,\delta_0)$:

$$\forall \bar{\eta} \in B(0,\delta): \left| \frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{x}+\bar{\eta}) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{x}) \right| < \frac{\varepsilon}{n}$$

Όμως $\forall \bar{\eta} \in B(\bar{0},\delta)$: $\|\bar{y}^{(k-1)} + \vartheta_k \eta_k \bar{e}_k - \bar{x}\| \leq \dots \|\bar{\eta}\| < \delta$

$$\underset{(**)}{\Rightarrow} \frac{|f(\bar{x}+\bar{\eta}) - f(\bar{x}) - \nabla f(\bar{x})\bar{\eta}|}{\|\bar{\eta}\|} < \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon$$